1. Tutorium

Samstag, 23. Oktober 2021 14:51

Tutorium Quantenmechanik

- Zeit: Dienstag $8^{15} - 9^{45}$ Uhr
- email: m.beyer@uni-jena.de
- Literatur: 1.) Cohen-Tannoudji
  2.) Bartelmann
  3.) Fließbach

Warum überhaupt Quantenmechanik?

- ca. 1900 verschiedene Theorien zur Schwarzkörperstrahlung

Rayleigh-Jeans

$$\rho = \frac{8\pi}{c} k_B T \nu^2$$

\+ gut für kleine Frequenzen

\- Strahlungsleistung divergiert

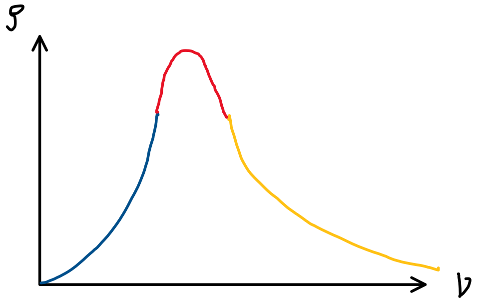
$$P = \int_{\mathbb{R}} \rho \cdot d\nu \to \infty$$

Wiensches Gesetz

$$\rho = \frac{C_1 \nu^3}{e^{\frac{C_2 \cdot \nu}{T}}}$$

\+ gut für hohe Frequenzen

\- für niedrige Frequenzen unpassend



- Lösung: Planksches Strahlungsgesetz
  - Korrektur des Wienschen Gesetzes mit $\sim \nu^2$ bei niedrigen Frequenzen
  - Vergleich mit kinetischer Gastheorie: $e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}$

$$\Rightarrow \rho = C_1 \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}} \qquad h \text{ – „Hilfskonstante"}$$

- „Akt der Verzweiflung" linearisiere $e^{(\cdot)}$ für kleine ν: $e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 1 + \frac{h\nu}{k_B T}$

$$\Rightarrow \rho = C_1 \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \underset{\nu \ll 1}{\approx} C_1 \frac{\nu^3}{\frac{h\nu}{k_B T}} = \frac{C_1}{h} k_B T \nu^2 \overset{!}{=} \frac{8\pi}{c} k_B T \nu^2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{8\pi h}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{8\pi h}{c} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}}$$ Plancksches Strahlungsgesetz 1918 Nobelpreis

- Folge: Quantisierung der Strahlung notwendig $E = n \cdot h\nu \quad n \in \mathbb{N}$
  $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}$ Plancksches Wirkungsquantum $[h] = \mathrm{Js}$

Welle-Teilchen Dualismus von Licht

- Licht hat Teilchen-Eigenschaften ↗ Planck, Einstein (Photoeffekt)
- Licht hat ebenfalls Welleneigenschaften:
  - Beugung
  - Interferenz
  - Huygenssches Prinzip

↳ Licht hat sowohl Teilchen- als auch Welleneigenschaften

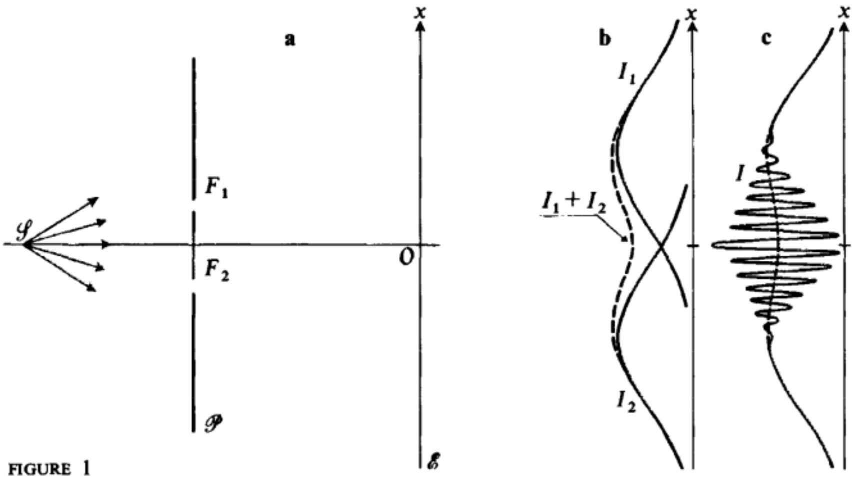


FIGURE 1

[Cohen Tannoudji]

- Wir beobachten eine Interferenzerscheinung auf dem Schirm
  $I(x) \neq I_1(x) + I_2(x)$

→ Summe der Intensitäten der Einzelspalte entspricht nicht der des Doppelspalts

- Die Wellentheorie erklärt leicht dieses Phänomen

→ Das Gesamtfeld ergibt sich durch Superposition der elektrischen Felder

$$E(x) = E_1(x) + E_2(x)$$

- Dann folgt für die Intensität $I \propto |E|^2$

$$I \propto |E_1 + E_2|^2 = \underbrace{|E_1|^2}_{I_1} + \underbrace{|E_2|^2}_{I_2} + \underbrace{E_1 \cdot E_2^* + E_1^* E_2}_{\text{Interferenzterm}}$$

- Was passiert aber wenn die Photonenquelle die Photonen einzeln emittiert?
  1.) Erhöhen wir die Belichtungszeit erscheinen trotzdem weiterhin Interferenzmuster Teilchentheorie ↯
  2.) Verringern wir die Belichtungszeit, so beobachten wir lokalisierte Punktaufschläge

Interferenzmuster Teilchentheorie ↯

2.) Verringern wir die Belichtungszeit, so beobachten wir lokalisierte Punktaufschläge auf der Photoplatte Wellentheorie ↯

Licht verhält sich gleichzeitig wie eine Welle und wie ein Fluss aus Teilchen.
Die Welle ermöglicht es uns die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass sich ein Teilchen an einem bestimmten Ort manifestiert.

II Der mathematische Rahmen

- alles was wir brauchen ist lineare Algebra!
- Hilberträume bilden die Grundlage für alle Berechnungen

Definition: Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Elementen $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ ← Ketvektoren

- Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen
  - Vektoraddition $|\psi\rangle + |\phi\rangle \in \mathcal{H}$
  - Skalarmultiplikation $\alpha|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$
  - kommutativ, assoziativ
  - neutrales Element $|\psi\rangle + |0\rangle = |\psi\rangle$ meist $|0\rangle \equiv 0$
  - inverses Element, Einselement

- positiv definites Skalarprodukt: $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$
  - wir ordnen zwei Elementen $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ die komplexe Zahl $\langle\phi|\psi\rangle$ zu
  - hermitesch: $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$
  - sesquilinear: $\langle\phi|\alpha\psi\rangle = \alpha\langle\phi|\psi\rangle$, $\langle\alpha\phi|\psi\rangle = \alpha^*\langle\phi|\psi\rangle$
  - positiv definit: $\langle\phi|\phi\rangle \geq 0$

- Vollständigkeit: Für jede Cauchy-Folge von Vektoren $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}$ liegt ihr Grenzwert in $\mathcal{H}$: $\lim_{n\to\infty} |\psi_n\rangle = |\psi\rangle \in \mathcal{H}$

Cauchy-Folgen: $|\psi_n\rangle$ ist eine Cauchy-Folge wenn $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\|\psi_n - \psi_m\| < \varepsilon \quad \forall m,n \geq n_0$$

eher technisch

Wir haben hier schon die Abbildung der Norm benutzt $\|.\| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_0^+ \quad \psi \mapsto \|\psi\| := \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$

$\Rightarrow \quad \|\psi + \phi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$ Δ-Ungleichung

$\quad \|\langle\psi|\phi\rangle\| \leq \|\phi\| \cdot \|\psi\|$ Cauchy-Schwarz Ungleichung weitere Begriffe: a) $|\Psi\rangle$ ist normiert wenn $\|\Psi\| = 1$

b) $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$ sind orthogonal wenn $\langle\Psi|\Phi\rangle = 0$

c.) Wir nennen die Menge $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots\}$ Basis von $\mathcal{H}$, falls für alle $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ gilt:

$$|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |e_i\rangle \qquad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

d.) Dimension von $\mathcal{H}$ $\#\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots\}$